Лекция 15. Оптимизационные модели

1. Понятие и преимущества оптимизационных моделей
2. Графический способ решения оптимизационных задач
3. Динамическое программирование
4. Выбор курса лечения
5. Многокритериальные задачи
6. Теоретико-игровые модели.

1. Понятие и преимущества оптимизационных моделей

Оптимизационные модели предполагают нахождение максимума или минимума какого-то математического выражения или функции, когда некоторые из переменных мы можем изменять в определенных пределах.

Оптимизация – целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при заданных условиях. Поиски оптимальных решений привели к созданию специальных математических методов и уже в 18 веке были заложены математические основы оптимизации (вариационное исчисление и др.). Однако, до второй половины 20 века практическое использование математических методов оптимизации ограничивалось большим объемом вычислительной работы, которую бех ЭВМ реализовать было крайне трудно.

Постановка задач оптимизации предполагает существование конкурирующих свойств процесса, например, количество продукции – расход сырья, количество продукции – качество продукции. Выбор компромиссного варианта для указанных свойств и представляет собой процедуру решения оптимизационной задачи.

Примеры постановки оптимизационных задач в экологии, экономике и сельском хозяйстве:

- С помощью динамической модели роста дрожжей в смешанной культуре можно попытаться определить соотношение между исходными количествами обоих видов, при которых продуцируется максимум дрожжевых клеток.
- В модели роста овса и ячменя в совместном посеве можно определить каково оптимальное исходное соотношение между этими культурами, дающее максимальный общий урожай.
- Для реализации определенной массы сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать разумным образом: число точек, их размещение, товарные запасы и количество персонала на каждой из них так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.
- При организации медицинского обследования в районе, где обнаружены случаи опасного заболевания, требуется разработать такой план обследования (число медпунктов, их размещение, последовательность осмотров специалистами, виды анализов и т.д.), который позволит выявить, по возможности, максимальный процент заболевших и носителей инфекции.

На это выделены ограниченные материальные средства, оборудование, медицинский персонал.

- Оптимизация селекционно-генетических исследований: В распоряжении имеется коллекция образцов растений, несущих гены, ответственные за проявление различных ценных признаков: по одному, два, три и более генов (возможно сцепленных) в одном образце. Требуется разработать оптимальную схему выбора части образцов и их скрещиваний, чередующихся с отборами по фенотипу. Цель – вывести новый образец с заранее заданным новым сочетанием генов.
- Оптимизация деятельности хозяйства. Как лучше всего организовать деятельность крупного фермерского хозяйства – какие культуры и на каких площадях выращивать, в какой пропорции следует выделять средства для животноводства, растениеводства и т. д. – для получения максимальной прибыли?

При постановке оптимизационной задачи важно требовать экстремального значения лишь одной величины, т. е. одновременно системе не должно приписываться два и более критерия оптимизации, так как практически всегда экстремум одного выражения не совпадает с экстремумом другого. Оптимизируемый вариант должен оцениваться какой-либо количественной мерой – критерием оптимальности. На основе выбранного критерия оптимальности составляется целевая функция, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение. В процессе решения задачи оптимизации находят экстремум целевой функции.

Применение оптимизационных моделей для решения подобных задач имеет следующие преимущества:

1. в ходе решения можно узнать значения переменных целевой функции, при которых она оптимальна.
2. метод показывает то ограничение, которое нужно ослабить, чтобы улучшить оптимальное значение целевой функции. При условии, что можно ослабить это ограничение, экспериментатор сможет найти еще лучшее решение.

К основным элементам оптимизационных моделей относят управляемые переменные, которые могут изменяться в определенных пределах и оптимальные значения которых должны быть определены; целевую функцию, которая показывает, что необходимо найти; ограничения целевой функции (это условия, ограничивающие возможность выбора значений управляемых переменных).

Методы оптимизации могут быть скалярными (оптимизация проводится по одному критерию), векторными (оптимизация проводится по многим критериям), поисковыми (включают методы регулярного и случайного поиска), аналитическими (методы дифференциального исчисления, методы вариационного исчисления и др.), вычислительными (основаны на математическом программировании, которое может быть линейным, нелинейным, дискретным, динамическим, стохастическим, эвристическим и др.), теоретико-вероятностными, теоретико-игровыми и др.

Когда неизвестных переменных только две, задачи оптимизации легко решаются графическим методом. Для более, чем двух переменных, задача сильно усложняется, и обычный подход к ее решению предполагает использование «симплекс-метода». Практическое применение данного метода основано на проведении итерационных вычислений до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение. Реализация расчетов возможна при помощи калькулятора (один из вариантов описан Пугачевой и др., 2017) или при использовании специальных компьютерных программ (одна из простейших – Simplex Advanced).

2. **Графический способ решения оптимизационных задач**.

В качестве примера рассмотрим решение двух задач, которые без преувеличения можно назвать классическими. Первая была предложена Частоном в 1971 году и позволяет разработать оптимальную стратегию питания для хищника. Вторая помогает фермеру выбрать самый дешевый способ внесения удобрений при условии соблюдения агротехнических требований.

Задача 1. Пусть существует хищник, гнездо которого находится в точке A, и есть две потенциальные жертвы на участках B и C. Время, необходимое хищнику для того, чтобы добраться до пищи и возвратиться с единицей добычи, считается 2 и 3 минуты, соответственно. На поимку добычи на участке B хищник тратит 2 мин., а на участке C – 1 мин. Энергетическая ценность единицы добычи на участке B = 25 Дж, а на участке C = 30 Дж. Найти способ добычи пищи, который давал бы максимальный энергетический выход при следующих условиях:

Время на путь за добычей в обе стороны не более 120 мин/сутки.

Время на поимку не более 80 мин/сутки.

Обозначим переменные: x_1- количество жертв на участке B

x_2 – количество жертв на участке C

Введем ограничения (они записываются в виде неравенств**):**

- на время в пути: $\mathbf{2x_1+3x_2 \leq 120}$

- на время поимки жертвы: $\mathbf{2x_1+1x_2 \leq 80}$

Нужно записать так же неявные ограничения: $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, так как хищник не может поймать отрицательное число жертв.

При этих ограничениях мы хотим оптимизировать целевую функцию: максимум энергии $\mathbf{Z=25x_1+30x_2}$

Решение: Ограничение по времени в пути показывает, что если $x_1=0$, то x_2 может быть не более 40 единиц. Аналогично, если $x_2=0$, то x_1 может быть не более 60.

Комбинации предельных значений x_1 и x_2 можно представить в виде прямой, соединяющей 2 точки ($x_1=60$; $x_2=0$) и ($x_1=0$; $x_2=40$). Применив аналогичное рассуждение к ограничению по времени поиска пищи, мы получим, что, если x_1=0,то x_2 не может превышать 80 единиц, а если x_2=0, то x_1 не может превышать больше 40 единиц.

Таким образом, все имеющие смысл решения (Рис. 1) лежат в четырехугольнике OPQR, а максимум целевой функции в точке, которая наиболее удалена от начала координат. В направлении, указанном стрелкой. Эта точка имеет координаты (x_1=30; x_2=20), а максимальное значение функции равно

$Z=25\ x_1+30\ x_2$ = 25*30+30*20 = 1350 Дж.

Можно определить как влияет ослабление одного или обоих ограничений на целевую функцию, имея в виду, что самым важным при оптимизации является нахождение того ограничения, ослабление которого позволяет найти еще лучшее решение.

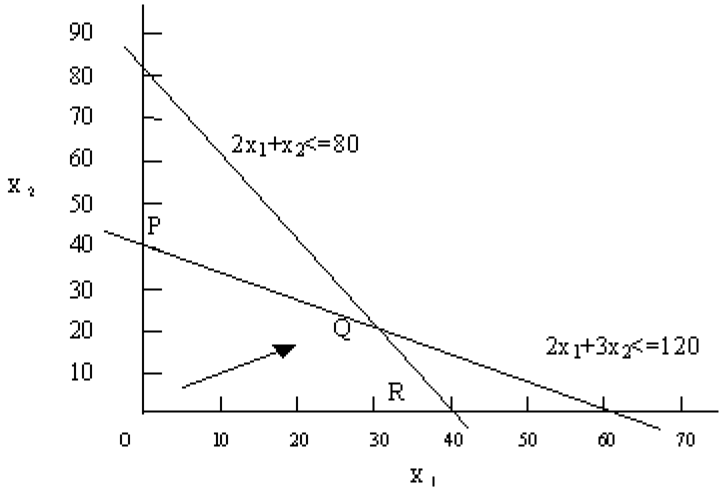


Рис. 1 Графическое представление решения задачи 1.

Задача 2: Фермеру необходимо определить количество свиного навоза и сложных минеральных удобрений для разбрасывания на 20 га лугопастбищных угодий таким образом, чтобы стоимость внесенных удобрений была минимальной. При этом необходимо внести не менее 75 кг/га азота, 25 кг/га фосфора, 35 кг/га калия. Производительность труда при разбрасывании навоза составляет 8 т/час, при разбрасывании сложных удобрений – 0,4 т/час. Ресурс времени на выполнение данной операции – 25 часов. Стоимость 1 тонны навоза = 2,5 у. е., 1 тонны сложных удобрений = 130 у. е.

Таблица - Химический состав удобрений кг/т

Удобрение	азот	фосфор	калий
Свиной навоз	6	1,5	4
Сложное удобрение	250	100	100

- **Обозначим переменные**: x_1- количество свиного навоза (т)
  x_2 – количество сложных удобрений (т)
- **Обозначим целевую функцию**: минимум затрат $Z=2{,}5x_1+130x_2$
- **Введем ограничения**:

на нормы внесения удобрений: $6x_1+250x_2 \geq 1500$ азот

$1{,}5x_1+100x_2 \geq 500$ фосфор

$4x_1+100x_2 \geq 700$ калий

- на временной ресурс: $x_1/8+x_2/0{,}4 \leq 25$, или, умножив обе части на 8, $x_1+20x_2 \leq 200$

Решение: Найдем координаты точек пересечения графиков с осями координат:

Для ограничения по азоту

$6x_1+250x_2 = 1500$

$x_1 = 0$ $x_2 = 6$

$x_2 = 0$ $x_1 = 250$

Для ограничения по фосфору

$1{,}5x_1+100x_2 = 500$

$x_1 = 0$ $x_2 = 5$

$x_2 = 0$ $x_1 = 333$

Для ограничения по калию

$4x_1+100x_2 = 700$

$x_1 = 0$ $x_2 = 7$

$x_2 = 0$ $x_1 = 175$

Для ограничения по времени внесения удобрений

$x_1+20x_2 = 200$

$x_1 = 0$ $x_2 = 10$

$x_2 = 0$ $x_1 = 200$

Графический способ решения задачи предполагает построение линий по рассчитанным координатам точек, это точки пересечения с осями координат (рис. 2).

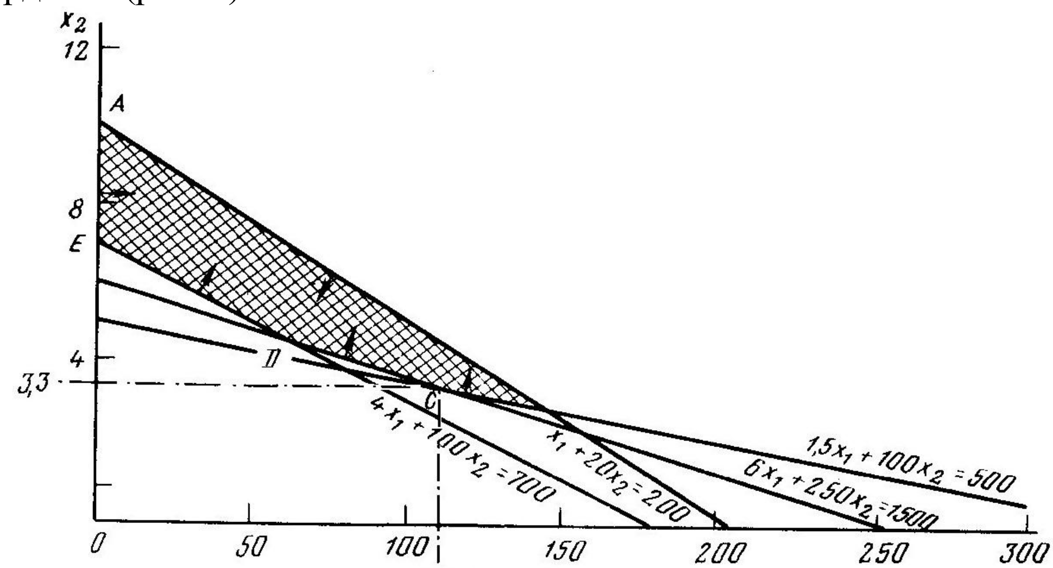


Рис. 2 Графическое представление решения задачи 2.

При нанесении линий на рисунке важно уяснить, где располагается область допустимых решений. В данном случае возможные решения располагаются выше прямых, отображающих ограничения по азоту, фосфору, калию, так как необходимо внести не менее указанного количества этих элементов питания. Ограничение по времени, наоборот, указывает на то, что допустимые решения находятся ниже соответствующей прямой. Следовательно, область, удовлетворяющая всем условиям, находится в границах многоугольника ABCDE.

Далее следует найти оптимальное решение: так как нас интересует минимальная стоимость внесения удобрений, то оптимальное решение соответствует координатам точки, принадлежащей многоугольнику ABCDE и наиболее близкой к началу координат. На рисунке 2 это точка С с координатами x_1 = 111,1 ; x_2 = 3,3. Подставив эти значения в уравнение целевой функции находим минимальную стоимость внесения удобрений:

$Z=2{,}5\cdot 111{,}1+130\cdot 3{,}33= 277{,}75+432{,}9 \approx 711{,}1$

3. Динамическое программирование.

Существует много задач, когда оптимальный план составляется на сравнительно короткий срок и более или менее известны необходимые условия его выполнения.

При перспективном планировании план составляется на длительный период, в течение которого возможны существенные изменения, как в условиях производства, так и в соответствующих ресурсах. Чтобы учесть динамику процессов, этот период нужно разбить на ряд этапов, в результате чего в модели появляются специфические ограничения и число уравнений и неравенств значительно увеличивается. Подобные задачи решаются методом динамического программирования. Это более молодая отрасль оптимального планирования, чем, например, линейное программирование. Динамическое программирование специально предназначено для оптимизации многошаговых процессов.

Рассмотрим пример. Пусть некоторому хозяйству на пять лет выделен кредит в размере Q для развития двух отраслей: растениеводства и животноводства. В начале каждого года часть этих средств распределяется между указанными отраслями. Известна отдача, получаемая от вложения средств в каждую отрасль. При этом отдача отраслей может меняться по годам и зависеть от предыдущих вложений. Вопрос заключается в том, чтобы для каждого года определить размер средств, которые следует направить на развитие каждой отрасли, причем, общая прибыль хозяйства, полученная от обеих отраслей за пять лет, должна быть максимальной.

Сформулированная задача о распределении средств между растениеводством и животноводством оказывается задачей на поиск максимума целевой функции, которая имеет вид

$$\sum_{i=1}^{5}[\, f'_{i+1}(x_i) + f''_{i+1}(Q_i - x_i)]$$

Здесь $f'_{i+1}(x_i)$ – прибыль первой отрасли (растениеводства) в $(i+1)$ – ом году при условии, что в предыдущем году в нее вложили x_i средств. Аналогичный смысл имеет другое слагаемое $f''_{i+1}(Q_i - x_i)$ для второй отрасли (животноводства). Здесь учтено, что если в первую отрасль вложили x_i средств, то для второй их осталось $Q_i - x_i$, причём $\sum_{i=1}^{5} Q_i = Q$

В реальном случае дело может касаться распределения средств не между двумя отраслями, а среди большего количества. Например, растениеводство можно разбить на «подотрасли»: зерновое хозяйство, овощеводство, кормопроизводство и т. д., животноводство – на молочное, откорм крупного рогатого скота, свиноводство, овцеводство и т. д. В число отраслей, которым выделяются деньги, можно также включить механизацию, мелиорацию, строительство.

Специфика и трудность задач, для решения которых целесообразно прибегать к методам динамического программирования, состоит в том, что оптимум нужно найти в целом для всей последовательности этапов (лет). Сравнительно легко сделать выбор для одного шага, значительно сложнее предусмотреть, как он отразится в долгосрочной перспективе. Соображения ближайшей выгоды порой оборачиваются крупными просчетами. Скажем, мы знаем, что наибольшую прибыль от вложения средств дает животноводство, поэтому можно главную их часть направить именно в эту отрасль. Но подобное решение может оказаться неправильным, если на дело взглянуть с точки зрения перспективы. Лишая средств растениеводство, мы тем самым подрываем развитие не только данной отрасли, но и затрудняем развитие животноводства, поскольку заведомо ослабляем его кормовую базу, возможно, уже в следующем году. Предвидеть последствия своих действий – значит, предвидеть будущее. Динамическое программирование как раз и позволяет учитывать те выгоды, которые можно получить не на одном каком-либо этапе, а от всего процесса с учетом перспективы.

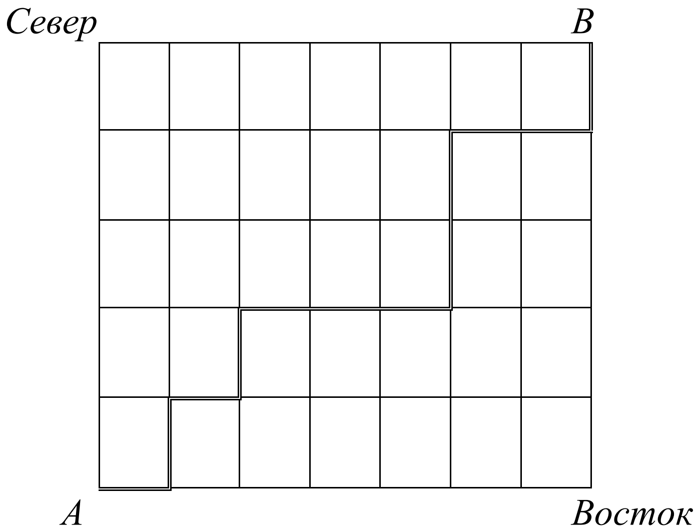
Итак, общее правило планирования многоэтапного процесса состоит в том, что решение на каждом шаге должно приниматься с учетом будущих последствий. Но в реальности часто планирование ведется на один шаг вперед. Дело в том, что предусмотреть, как события станут развиваться в будущем, очень трудно – нужно перебрать огромное число вариантов.

Идея решения задач динамического программирования основана на том, что среди шагов, на которых приходится принимать решение, есть один – последний, когда не требуется многовариантных расчетов. Нужно только учесть выгоду, которую можно получить именно на этом этапе. Если бы нам каким-либо образом удалось оптимально распределить средства между отраслями для первых четырех лет, то спланировать их размещение для пятого года не составляло бы труда. Мы должны были бы разделить остатки средств между двумя отраслями так, чтобы прибыль, полученная в последнем году, была максимальной.

Идея динамического программирования и состоит в том, что процесс планирования начинается с последнего шага (года). Рассматриваются все возможные ситуации (остаток средств), возможные в результате выполнения предпоследнего шага и для каждой ситуации выбирается «условно» наилучший вариант последнего шага. Оптимально спланировав последний шаг, отступаем к предыдущему и тоже оцениваем его с тех же позиций. Таким образом, процесс динамического программирования разворачивается в обратном порядке – от последнего шага к первому, от конца планового периода к его началу. Выигрыш здесь достигается за счет того, что вместо решения сложной глобальной проблемы раз за разом решаются несравнимо более простые задачи последовательной «условной» оптимизации одного шага.

Обратим внимание на еще одну особенность, отличающую его от линейного программирования. Тот и другой метод получили свое название не случайно. Напомним, что сфера использования линейного программирования предполагает линейность целевой функции и ограничений. Во многих случаях такое допущение вполне приемлемо, но далеко не всегда. Так, двойная доза удобрения может не только не дать двойной прибавки урожая, но и нанести вред растениям и почве; увеличение в два раза средств на развитие производства зачастую не способно привести к двойному увеличению прибыли и т.д. Когда предположение о пропорциональности результата исходным действиям явно несправедливо, обращаться к линейному программированию неправомерно. Что же касается динамического программирования, то оно применимо и для решения многих «нелинейных» задач.

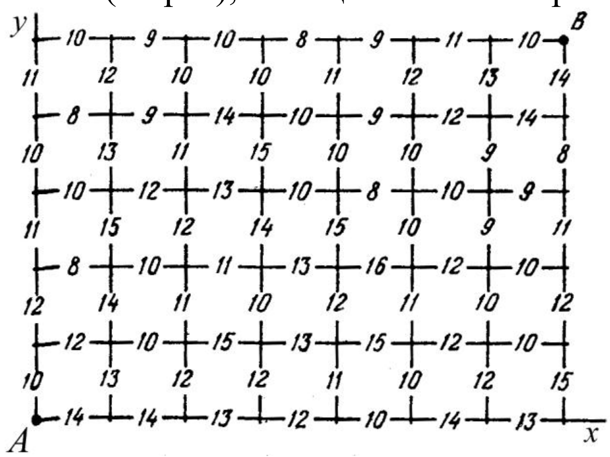
Рассмотрим простой игровой *пример по оптимизации пути*. Предположим, что нам нужно соорудить путь, соединяющий два пункта *A* и *B*, из которых второй лежит к северо-востоку от первого. Для простоты допустим, что прокладка пути состоит из ряда шагов, и на каждом шаге мы можем двигаться либо строго на восток, либо строго на север; любой путь из *A* в *B* представляет собой ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей (рисунок).



Затраты на сооружение каждого из таких отрезков заранее известны (они разные). Требуется проложить такой путь из отрезка *A* в *B*, при котором суммарные затраты минимальны.

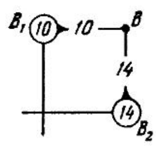
Как это сделать? Можно поступить одним из двух способов; либо перебрать все возможные варианты пути, и выбрать тот, на котором затраты минимальны (даже при небольшом числе отрезков это очень трудно – слишком много вариантов); либо разделить процесс перехода из A в B на отдельные шаги (один шаг – один отрезок) и оптимизировать управление по шагам, начиная с последнего. Оказывается, что второй способ гораздо удобнее. Здесь, как и везде в исследовании операций, сказываются преимущества целенаправленного, организованного поиска решения перед «слепым» перебором.

Пусть любой путь из A в B состоит из m=7+5=12 отрезков, направленных только на восток или на север. Проставим на каждом из отрезков известное число, выражающее стоимость прокладки пути по этому отрезку (рисунок). Требуется выбрать такой путь из A в B, для которого сумма чисел (затрат), стоящих на всех отрезках пути, минимальна.

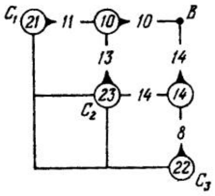


Процедуру оптимизации будем разворачивать в обратном направлении – от конца к началу. Прежде всего, произведем оптимизацию последнего 12-го шага. Рассмотрим отдельно правый верхний угол нашей прямоугольной сетки (рисунок).

Где мы можем находиться после 11-го шага? Только там, откуда за 1 (последний) шаг можно попасть в B, то есть в одной из точек B_1 или B_2. Если мы находимся в точке B_1, у нас нет выбора (управление вынужденное): надо идти на восток, и это обойдется нам в 10 единиц (условные оптимальные затраты последнего шага). Запишем это число 10 в кружочке у точки B_1, а оптимальное управление покажем короткой стрелкой, исходящей из B_1 и направленной на восток. Для точки B_2 управление тоже вынужденное (север), расход (условные оптимальные затраты) до конца равен 14. Запишем его в кружке у точки B_2 со стрелкой. Таким образом, условная оптимизация последнего шага сделана, и условные оптимальные затраты для каждой из двух возможных точек B_1 и B_2 найдены и записаны в соответствующем кружке (рисунок).

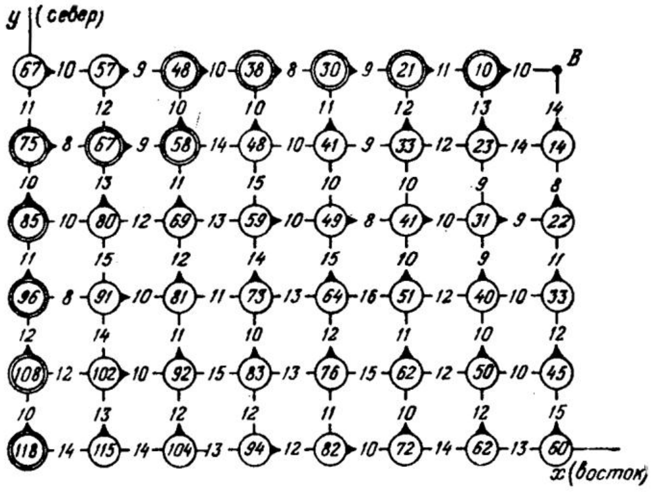


Теперь оптимизируем предпоследний (11-й) шаг. После предпоследнего (10-го) шага мы могли оказаться в одной из точек C_1, C_2, C_3 (рисунок).



Найдем для каждой из них условное оптимальное управление и условные оптимальные затраты. Для точки C_1 управление вынужденное: идти на восток; обойдется это нам до конца пути в 21 единицу (11 на данном шаге, плюс 10, записанных в кружке при B_1). Число 21 записываем в кружке C_1. Для точки C_2 управление уже не вынужденное: мы можем идти как на восток, так и на север. В первом случае мы затратим на данном шаге 14 единиц и от B_2 до конца – еще 14, всего 28 единиц. Если пойдем на север, то затратим 13+10, всего 23 единицы. Значит, если мы в точке C_2, то условное оптимальное управление – идти на север (отмечаем это направление стрелкой, а число 23 – условные оптимальные затраты – записываем в кружке у C_2). Для точки C_3 управление снова вынужденное («*с*»), обойдется оно до конца пути в 22 единицы (ставим стрелку на север, число 22 записываем в кружке у C_3).

Аналогично «пятясь» от предпоследнего шага назад, найдем для каждой точки (всего их 7·5=35 с двумя возможными направлениями в каждой точке) условное оптимальное управление («*с*» или «*в*»), которое обозначим стрелкой, и условный оптимальный расход до конца пути, который запишем в кружке. Вычисляется он так: расход на данном шаге складывается с уже оптимизированным будущим расходом, записанным в кружке, куда ведет стрелка. Таким образом, на каждом шаге мы оптимизируем только один шаг, а следующие за ним – уже оптимизированы. Конечный результат процедуры оптимизации показан на рисунке.



Таким образом, условная оптимизация уже выполнена: в какой бы из узловых точек мы ни находились, мы уже знаем, куда идти (стрелка) и во что нам по – минимуму обойдется путь до конца (число в кружке). В том числе, если мы находимся в точке A: в кружке при точке A записан оптимальный расход (цена) на сооружение всего пути из A в B: W^*=118.

Теперь остается прочитать безусловное оптимальное управление – траекторию, ведущую из A в B самым дешевым способом. Для этого нужно только «идти по стрелкам». Такая оптимальная траектория отмечена на рисунке дважды обведенными кружками. Соответствующее безусловное оптимальное управление будет:

x=(с, с, с, с, в, в, с, в, в, в, в, в),*

то есть первые четыре шага мы должны сделать на север, следующие два на восток, затем опять один на север, и остальные пять на восток. Задача решена.

Заметим, что в ходе условной оптимизации мы можем столкнуться со случаем, когда оба управления для какой-то точки на плоскости являются оптимальными, то есть приводят к одинаковому расходу средств от этой точки до конца. Например, в точке с координатами (5;1) оба управления «*с*» и «*в*» являются оптимальными, то есть дают минимальный расход до конца равный 62. Из них мы произвольно выбираем любое (в нашем случае мы выбрали «*с*»). Такие случаи неоднозначного выбора оптимального управления постоянно встречаются в динамическом программировании. От выбора одного из них, разумеется, может зависеть оптимальное управление всем процессом, но не оптимальный расход средств.

А теперь вернемся к началу и попробуем решить задачу «наивным» способом, выбирая на каждом шаге, начиная с первого, самое выгодное (для этого шага) направление (если таких два – выбираем любое). Таким способом мы получим управление:

x=(с, с, в, в, в, в, с, в, в, в, с, с).

Подсчитаем расходы для этой траектории. Они будут равны W=10+12+8+10+11+13+15+8+10+9+8+14=128, что, безусловно, больше, чем W^*=118. Причина в том, что «шагнув» в очередной раз по самому дешевому отрезку, мы можем попасть в точку, откуда любой следующий шаг и весь оставшийся путь весьма дороги. В данном случае разница не очень велика, но в других она может быть существенной.

4.Выбор курса лечения.

Рассмотрим модель, предложенную Р. Ледли и Л. Лестедом. Имеются две возможности лечения рака – лучевая терапия и химиотерапия, причем эффективность обоих методов выражена экспертом в некоторых общих единицах. Например, лекарственный препарат обладает эффективностью в 1000 единиц на грамм препарата, а облучение – 1000 единиц в минуту. Допустим, что для выздоровления больному требуется не менее 3000 единиц эффективности. Однако оба метода токсичны. Поэтому ни тот, ни другой нельзя применять неограниченно. Пусть токсичность методов также выражена в общих единицах, например, токсичность лекарства равна 400 единицам на грамм, а токсичность облучения 1000 единицам в минуту.

Допустим, что конкретный больной не должен получить более 2000 таких единиц.

Наконец, известно, что введение одного грамма лекарственного препарата причиняет больному в три раза большие неудобства, чем облучение в течение одной минуты, и, следовательно, если мы ввели x_1 единиц веса лекарств и облучали больного в течение x_2 минут, то причинили ему общее неудобство, равное

$Z=3x_1+x_2$ (1)

Задача состоит в том, чтобы подобрать такое соотношение обоих методов лечения (x_1 и x_2), которое удовлетворяло бы сформулированным выше ограничениям и в то же время причиняло как можно меньше неудобства больному. Такое соотношение назовем оптимальным.

Переходя на математический язык, мы можем сформулировать задачу следующим образом: в плоскости x_1Ox_2 нужно найти такую точку (x_1,x_2), чтобы величина $z=3x_1+x_2$ была наименьшей, и при этом выполнялись условия:

$1000x_1+1000x_2 \geq 3000$ (2)

(ограничение на эффективность) и

$400x_1+1000x_2 \leq 2000$ (3)

(ограничение на токсичность).

К этим двум ограничениям следует добавить еще одно:

$x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, (4),

следующее из того, что x_1 и x_2 по сути задачи не могут принимать отрицательные значения.

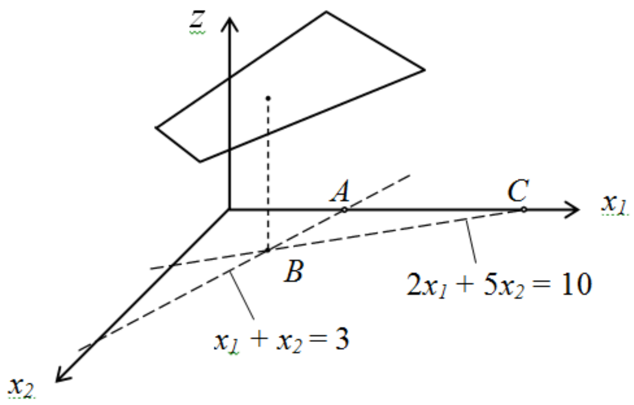
Условия (2), (3) и (4) выделяют в плоскости x_1Ox_2 некоторую область, в которой и находится искомая оптимальная точка. Найдём форму этой области. Прежде всего, из условия (4) следует, что искомая точка лежит в первом квадранте. Далее из ограничения (2) следует, что эта точка находится либо на самой прямой

$x_1 + x_2 = 3$ (5),

либо выше этой прямой. Аналогично из (3) следует, что точка может находиться либо на прямой

$2x_1 + 5x_2 = 10$ (6),

либо ниже этой прямой. Сопоставляя эти условия, получаем, что искомая точка может находиться либо внутри треугольника ABC (рисунок), либо на его границе.



Итак, из всех возможных точек (x_1, x_2) треугольника ABC (вместе с его границей) нам нужно найти такую, чтобы величина $z = 3x_1 + x_2$ была наименьшей.

Уравнение (1) – это уравнение плоскости в пространстве x_1, x_2, z.

Точка (x_1, x_2) пробегает все возможные положения в треугольнике ABC. В теории линейного программирования доказано, что z принимает наименьшее значение на границе треугольника, точнее в одной (или нескольких) вершине этого треугольника. Если бы переменных (x_i) и ограничений было не 2–3, а больше, то оптимальное решение следовало искать среди вершин многомерной фигуры, а не треугольника.

Таким образом, достаточно найти координаты (x_1, x_2) вершин A, B, и C, подсчитать в этих вершинах значение величины $z = 3x_1 + x_2$, а затем выбрать наименьшее (или равные наименьшие) из этих значений. Координаты точек A и C находятся сразу: $A = (3, 0)$ и $C = (5, 0)$. Найдём координаты точки B. Эта точка лежит на пересечении двух прямых с уравнениями (5) и (6). Следовательно, её координаты должны удовлетворять одновременно обоим уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases}$$

Эта система двух линейных уравнений относительно x_1 и x_2 легко решается, если, например, первое уравнение умножить на два, а затем вычесть его из второго. Мы получим: $x_1 = 5/3$, $x_2 = 4/3$. Это и есть координаты точки B.

Подсчитаем теперь z в точках A, B, и C. Имеем

$z_A = 9$; $z_B = 3 \cdot 5/3 + 1 \cdot 4/3 = 19/3 \approx 6{,}3$; $z_C = 15$.

Наименьшее значение z (минимум неудобств больному) принимает в точке $B = (5/3, 4/3)$. Следовательно, координаты этой точки и являются искомым решением. Курс лечения будет оптимальным, если ввести 5/3 грамм лекарственного препарата и провести облучение в течение 4/3 минуты.

Разумеется в приведённом примере ситуация намеренно упрощена. В реальном случае, например, может быть не один, а несколько лекарственных препаратов. В соответствии с этим может возрасти и число всевозможных ограничений. Итак, если функция z, наибольшее (или наименьшее) значение которой требуется отыскать, так же как и в этом примере, линейна по x_i

($z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$) и ограничения записываются также с помощью любых линейных равенств или неравенств, то подобные задачи являются задачами линейного программирования.

Линейное программирование позволяет решать внешне очень несходные задачи.

5. Многокритериальные задачи.

Рассмотренные ранее ситуации имели очень важное общее свойство – в каждой из них была единственная целевая функция. Именно единственность этой функции обеспечила возможность создания эффективных методов решения оптимизационных задач. Однако, естественно, возникает вопрос: а хорошо ли такие оптимизационные модели описывают реальную действительность? Ответ на него неоднозначен.

Да, эти модели могут достаточно хорошо описывать сравнительно простые ситуации, скажем, такие, как обсуждались выше. Нет, если приходится иметь дело с таким очень часто встречающимся фактом, когда целенаправленная человеческая деятельность преследует сразу несколько целей. В качестве иллюстрации вспомним очень популярный в одно время лозунг «Дадим больше товаров лучшего качества по более низкой цене». Этот лозунг в точности характеризует три противоречивые цели, и с этим приходится считаться.

Другой пример – многокритериальный отбор при сравнении линий в сортоиспытании, когда желательно, чтобы отобранные линии имели одновременно наибольшую урожайность, процент белка в зерне, самую низкую полегаемость и т.д.

Типичный пример – организация работы промышленного предприятия. С одной стороны нам хотелось бы обратить в максимум валовый объем продукции V. Желательно также было бы получить максимальный чистый доход D. Что касается себестоимости S, то ее хотелось бы обратить в минимум, а производительность труда $П$ – в максимум. При обдумывании задачи может возникнуть еще ряд дополнительных критериев.

Такая множественность показателей эффективности, из которых один желательно обратить в максимум, а другие – в минимум, характерна для любой сколько-нибудь сложной задачи исследования операций. Можно попытаться сформулировать ряд критериев, по которым будет оцениваться фермерское хозяйство, подумать о том, какой из них является главным (теснее всего связанным с целевой направленностью операции), а остальные (дополнительные) расположить в порядке убывающей важности. На этом примере можно убедиться в том, что а) ни один из показателей не может быть выбран в качестве единственного и б) формулировка системы показателей – не такая уж простая задача. И сами показатели и их упорядоченность по важности зависят от того, с точки зрения чьих интересов оптимизируется решение.

Итак, типичной для крупномасштабной задачи исследования операций является многокритериальность – наличие ряда количественных показателей

W_1, W_2,…, одни из которых желательно обратить в максимум, а другие – в минимум.

Спрашивается, можно ли найти решение, одновременно удовлетворяющее всем этим требованиям? Нет. Решение, обращающее в максимум какой-то один показатель, как правило, не обращает ни в максимум, ни в минимум другие. Поэтому часто применяемая формулировка: «достигнуть максимального эффекта при минимальных затратах» представляет собой не более чем фразу и при научном анализе должна быть отброшена.

Некоторые исследователи пытаются свести многокритериальную задачу к однокритериальной: составляют какую-то функцию от всех показателей W_i и рассматривают ее как один, «обобщенный» показатель, по которому и оптимизируется решение. Часто такой обобщенный показатель имеет вид дроби, в числителе которой стоят все величины, увеличении которых желательно, а в знаменателе – те, увеличение которых нежелательно. Например, продуктивность и доход – в числителе, время выполнения работы и расходы – в знаменателе и т.д.

Такой способ объединения нескольких показателей в один не может быть однозначно рекомендован, и вот почему: он основан на по крайней мере одном допущении, что недостаток в одном показателе всегда может быть скомпенсирован за счет другого; например, меньшая продуктивность – за счет более низкой стоимости и т.д. Часто это несправедливо.

Вспомним «критерий для оценки человека», предложенный когда-то Львом Толстым. Он имеет вид дроби, в числителе которой стоят действительные достоинства человека, а в знаменателе – его мнение о себе. С первого взгляда такой подход может оказаться логичным. Но представим себе человека, почти совсем не имеющего достоинств, но совсем не обладающего самомнением. По критерию Л.Н. Толстого такой человек должен иметь бесконечно большую ценность, с чем уж никак нельзя согласиться.

К подобным парадоксальным выводам может привести (и нередко приводит) пользование показателем в виде дроби, где в числителе стоят все величины, увеличении которых желательно, а в знаменателе – те, увеличение которых нежелательно.

Нередко применяется и другой сходный способ составления «обобщенного показателя эффективности» - он представляет собой «взвешенную сумму» частных показателей, в которую каждый из них W_i входит с каким-то «весом» a_i, отражающим его важность:

$W=a_1W_1+a_2W_2+…$

Для тех показателей, которые желательно увеличить, веса a_i берутся положительными, уменьшить – отрицательными.

При произвольном назначении весов a_1, a_2…этот способ ничем не лучше предыдущего (разве что обобщенный критерий не обращается в бесконечность). Его сторонники ссылаются на то, что и человек, принимая компромиссное решение, тоже мысленно «взвешивает» все «за» и «против», приписывая больший вес более важным для него факторам. Это, может быть, и так, но, по-видимому, «весовые коэффициенты», с которыми входят в расчет разные показатели, не постоянны, а меняются в зависимости от ситуации.

Рассмотрим это на примере. Человек выходит из дому, чтобы ехать на работу, боится опоздать и размышляет: каким транспортом воспользоваться? Трамвай ходит часто, но идет долго; автобус – быстрее, но с большими интервалами. Можно, конечно взять такси, но это обойдется дорого. Есть еще такое решение: часть пути проехать на метро, а затем взять такси. Но на стоянке может и не быть машин, а добираясь до работы со станции метро пешком, он рискует опоздать больше, чем если бы ехал на автобусе. Как ему поступить?

Перед нами типичная задача исследования операций с двумя критериями (показателями). Первый – среднее ожидаемое время опоздания T, которое хотелось бы сделать минимальным. Второй – ожидаемая стоимость проезда S; ее тоже желательно сделать минимальной. Но эти два требования, как мы поняли, несовместимы, поэтому человек должен принять компромиссное, приемлемое по обоим критериям, решение. Обобщенный показатель в данном случае будет выглядеть так:

$$W=a_1T+a_2S\rightarrow min.$$

Но беда в том, что весовые коэффициенты a_1, a_2 нельзя считать постоянными. Они зависят как от самих величин T и S, так и от обстановки. Например, если человек недавно уже получил выговор за опоздание, коэффициент при T у него, вероятно, увеличится, а на другой день после получки, вероятно, уменьшится коэффициент при S. Если же назначать веса a_1, a_2 произвольно, то, по существу, столь же произвольным будет и вытекающее из них «оптимальное» решение.

Нельзя надеяться полностью избавиться от субъективности в задачах, связанных с выбором решений. Даже в простейших, однокритериальных задачах она неизбежно присутствует, проявляясь хотя бы в выборе показателя эффективности и математической модели явления. Тем более, неизбежна субъективность при выборе решения в многокритериальной задаче. Правда, бывают редкие случаи, когда достаточно ознакомиться со значениями всех показателей для каждого варианта, чтобы сразу стало ясно, какой из них выбрать. Представим себе, например, что какой-то вариант решения x имеет преимущество над другими по всем показателям; ясно, что именно его следует предпочесть. Но гораздо чаще встречаются случаи, когда с первого взгляда ситуация неясна: один из показателей тянет в одну сторону, другой – в другую.

Однако, не смотря на это, математический аппарат может помочь при решении многокритериальных задач. Прежде всего, он позволяет решать «прямые» задачи исследования операций, то есть для любого решения x находить значения показателей эффективности W_1, $W_2, \ldots, W_k$. Для простоты предположим, что все эти величины желательно максимизировать. Пусть в составе множества возможных решений есть два решения x_1 и x_2 такие, что все критерии W_1, W_2..., W_k для первого решения больше или равны соответствующим критериям для второго решения, причем, хотя бы один из них действительно больше. Очевидно, тогда в составе множества решений X нет смысла сохранять решение x_2, оно вытесняется решением x_1. Выбросим решение x_2 как неконкурентоспособное и перейдем к сравнению других пар по всем критериям. В результате такой процедуры отбрасывания заведомо непригодных, невыгодных (по сравнению хотя бы с одним из остальных) решений множество осмысленных решений обычно сильно уменьшается.

Что касается окончательного выбора, то он всегда остается прерогативой человека. Только человек, с его непревзойденным умением решать неформальные задачи, принимать так называемые «компромиссные решения» (не строго-оптимальные, но приемлемые по ряду критериев) может взять на себя ответственность за окончательный выбор.

Существует еще один, часто применяемый способ свести многокритериальную задачу к однокритериальной – это выделить один (главный) показатель W_1 и стремиться его обратить в максимум, а на все остальные W_2, W_3,… наложить только некоторые ограничения, потребовав, чтобы они были не меньше каких-то заданных w_2, w_3,…Например, при оптимизации плана работы предприятия можно потребовать, чтобы прибыль была максимальна, план по ассортименту – выполнен или немного перевыполнен, а себестоимость продукции – не выше заданной. При таком подходе все показатели, кроме одного – главного, переводятся в разряд заданных условий α. Известный произвол в назначении границ w_2, w_3,…, разумеется, при этом остается; поправки в эти границы тоже могут быть введены в «диалоговом режиме».

Еще один путь построения компромиссного решения можно назвать «методом последовательных уступок». Предположим, что показатели W_1, W_2... удалось расположить в порядке убывающей важности. Сначала ищется решение, обращающее в максимум первый (важнейший) показатель $W_1=W_1*$. Затем назначается, исходя из практических соображений, возможно, с учетом малой точности, с которой нам известны входные данные, некоторая «уступка» ΔW_1, которую мы согласны сделать для того, чтобы максимизировать второй показатель W_2. Наложим на показатель W_1 ограничение: потребуем, чтобы он был не меньше, чем $W_1* - \Delta W_1$, и при этом ограничении ищем решение, обращающее в максимум W_2. Далее снова назначим «уступку» в W_2, ценой которой можно максимизировать W_3 и т.д. Такой способ построения компромиссного решения хорош тем, что здесь сразу видно, ценой какой «уступки» в одном показателе приобретается выигрыш в другом и какова величина этого выигрыша.

6. Теоретико-игровые модели

Существует специальный раздел математики, который позволяет предсказывать неопределенные объективные (природа) и субъективные (сознательные действия противников, соперников или других лиц) действия. Он носит название «теория игр». Для биологов и специалистов по сельскому хозяйству важны разделы этой теории, в которых предполагается, что человек ведет «игру» с природой.

Например, если фермер имеет средства лишь на один – два года, то ему нужны рекомендации для получения гарантированного урожая в текущем году, а не в среднем за много лет. Тогда вынужденная осторожность превращает любую случайность во врага. Погода из «нормального» стохастического фактора превращается в такого врага.

Общая схема подобных задач такова. Лицо, принимающее решение, имеет возможность сделать выбор из n возможных действий (например, выбрать сорта для посева, агроприемы и т.д.). Определена полезность каждого действия в зависимости от некоторых условий, о которых известно, что одно из них наверняка выполняется (засуха, холод, комфортные условия выращивания и т.д.). А вот какое – не известно. В дальнейшем эти условия мы будем называть состояниями природы. Иногда представляется возможным провести какой – либо эксперимент, который с некоторой вероятностью дает информацию о том, в каком состоянии находится или будет находиться природа (например, попытаться получить прогноз). Проведение такого эксперимента может, вообще говоря, вести к дополнительным затратам. В этих условиях следует решить, какое действие лучше всего предпринимать.

Наиболее простыми из ситуаций, содержащих «плохую» неопределенность, являются так называемые *конфликтные ситуации*. Так называются ситуации, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные (иногда противоположные) цели, причем выигрыш каждой стороны зависит от того, как себя поведут другие.

Примеры конфликтных ситуаций многообразны. К ним, безусловно, принадлежит любая ситуация, складывающаяся в ходе боевых действий, ряд ситуаций в области экономики. Столкновение противоречащих друг другу интересов наблюдается также в судопроизводстве, в спорте, видовой борьбе. В какой-то мере противоречивыми являются также взаимоотношения различных ступеней иерархии в сложных системах. В некотором смысле «конфликтной» можно считать и ситуацию с несколькими критериями: каждый из них предъявляет к управлению свои требования и, как правило, эти требования противоречивы.

Если условия операции неизвестны, мы не можем успешно оптимизировать решение, как мы это сделали бы, если бы располагали большей информацией. Поэтому, любое решение принятое в условиях неопределенности, хуже решения, принятого при заранее известных условиях. Однако, плохое или хорошее, решение должно быть принято. Важно придать этому решению как можно больше разумности. Недаром Т. Л. Саати, один из зарубежных специалистов по исследованию операций, определяя свой предмет, говорит: «Исследование операций представляет собой искусство давать плохие ответы на практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими методами».

В теории игр разработана математическая теория конфликтных ситуаций. Ее цель – предложение рекомендаций по оптимальному поведению участников конфликта.

Каждая непосредственно взятая из практики конфликтная ситуация очень сложна, и ее анализ затруднен наличием привходящих, несущественных факторов. Чтобы сделать возможным математический анализ конфликта, строится его математическая модель. Такую модель называют игрой. Игра ведется по определенным правилам. Эти правила указывают «права и обязанности» участников, а также исход игры – выигрыш или проигрыш каждого участника в зависимости от сложившейся обстановки.

Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтов – «играми» в буквальном смысле слова (шашки, шахматы, карточные игры и т.п.). Отсюда и название «теории игр», и ее терминология: конфликтные стороны условно называются «игроками», одно осуществление игры – «партией», исход игры – «выигрышем» или «проигрышем». Будем считать, что выигрыши (проигрыши) участников имеют количественное выражение (если это не так, то всегда можно им его приписать, например, в шахматах считать «выигрыш» за единицу, «проигрыш» - за минус единицу, «ничью» - за нуль).

Развитие игры во времени можно представлять как ряд последовательных «ходов» участников (в простейшем варианте – один ход). Ходом называется выбор игроком одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление. Ходы бывают личные и случайные. При личном ходе игрок сознательно выбирает и осуществляет тот или другой вариант действий (пример – любой ход в шахматах). При случайном ходе выбор осуществляется не только волей игрока, но также каким-то механизмом случайного выбора («бросание монеты» с оптимально подобранной вероятностью и т.д.).

Можно предположить, что все эти решения приняты игроком заранее. Это будет значить, что игрок выбрал определенную стратегию. Стратегия бывает чистой и смешанной. Чистая стратегия состоит только из личных ходов, смешанная включает случайные ходы. Выбор стратегии означает, что игрок может и не участвовать в игре лично, а передать алгоритм выбора своих ходов незаинтересованному лицу. Стратегия, например, может быть задана машине-автомату в виде программы (именно так играют в шахматы ЭВМ).

Игра называется игрой с нулевой суммой, если сумма выигрышей всех игроков равна нулю (то есть каждый игрок выигрывает только за счет других). Самый простой случай – парная игра с нулевой суммой – называется антагонистической (или игрой со строгим соперничеством). Теория антагонистических игр – наиболее развитый раздел теории игр, с четкими рекомендациями. Ниже мы познакомимся с некоторыми ее понятиями и приемами.

Теория игр, как и всякая математическая модель, имеет свои ограничения. Одним из них является предположение о полной («идеальной») разумности противника. В реальном конфликте зачастую оптимальная стратегия состоит в том, чтобы угадать, в чем противник «глуп», и воспользоваться этой глупостью в свою пользу. Схемы теории игр не включают элементов риска, неизбежно сопровождающего разумные решения в реальных конфликтах. В теории игр чаще выявляется наиболее осторожное, «перестраховочное» поведение участников конфликта. Сознавая эти ограничения и, поэтому, не придерживаясь слепо рекомендаций, полученных игровыми методами, можно все же разумно использовать аппарат теории игр как «совещательный» при выборе решения.

Пример 1. Рассмотрим числовой пример игры с нулевой суммой. Предполагается, что результатом игры является плата, которую в соответствии с правилами проигравший платит выигравшему. Ради простоты ограничимся рассмотрением одноходовых игр, в которых участвуют два игрока *A* и *B*, причем проигрыш одного, например, *B*, равен выигрышу другого, то есть *A*. Для того чтобы полностью определить такую игру, нужно задать таблицу платежей – платежную матрицу. Поясним это на примере. Пусть задана следующая платежная матрица (таблица).

Игроки		*B*			
		ход 1	ход 2	ход 3	ход 4
A	ход 1	5	4	8	9
	ход 2	0	-2	5	7
	ход 3	1	-1	3	6

Матрица известна обоим игрокам. Игрок *A* должен выбрать одну из строк матрицы (ход). Игрок *B*, не зная результата его выбора, должен выбрать один из столбцов. Число, стоящее на пересечении выбранных ими строки и столбца, определяет выигрыш игрока *A*. Выигрыш игрока *B* равен этому же числу с обратным знаком. Например, если *A* выбрал вторую строку, а *B* – третий столбец, то *A* выигрывает, а *B* проигрывает 5 единиц. Будем считать, что игроки осторожны и целью каждого из них является максимизация наименьшего возможного (гарантированного) выигрыша.

Если мы выбираем природу в качестве противника, то решение, полученное с помощью игровых моделей позволяет минимизировать возможный ущерб.

Основной вопрос, который возникает в теории игр, состоит в следующем: существует ли наилучший способ игры для каждого из игроков, то есть, имеются ли у них оптимальные стратегии? Сразу видно, что игроку *A* выгоднее всего выбирать ход 1, так как элементы первой строки соответственно больше элементов второй и третьей строк. Точно также игроку *B* выгоднее всего выбирать ход 2, так как элементы второго столбца соответственно меньше элементов остальных столбцов.

В теории игр доказано следующее правило. Если наибольший из минимальных выигрышей для *A* в точности равен наименьшему из возможных максимальных проигрышей для *B*, то есть если минимум в какой-нибудь строке платежной матрицы совпадает с максимумом в соответствующем столбце, то эти строка и столбец являются оптимальными чистыми стратегиями игроков. Точка их пересечения называется седловой точкой платежной матрицы. В примере 1. седловой точкой является число 4.

Следовательно, благодаря специфическому свойству данной платежной матрицы – наличию в ней седловой точки, найдены оптимальные чистые стратегии игроков *A* – всегда выбирать ход 1, *B* – ход 2. Число 4 в этом случае носит название цены игры. Смысл этого термина такой: цена игры – это та плата, которую получает оптимально играющий игрок, играя с другим оптимально играющим игроком. Ясно, что ход 1 игрока *A* обеспечивает ему выигрыш не менее 4, а ход 2 игрока В гарантирует ему проигрыш не более 4 (игроки *A* и *B* не обязательно равноправны).

Но далеко не каждая платежная матрица имеет седловую точку.

Пример 2. Саша и Лиза условились встречаться зимой возле кинотеатра. Если Саша придет раньше назначенного времени, то Лизы еще не будет и ему придется мерзнуть. Потери Саши в этом случае можно оценить числом –1. Если раньше придет Лиза, то ему будет еще хуже: потери равны –4. В том случае, когда оба приходят одновременно (поздно или рано), потерь нет ни у кого.

Как быть Саше и Лизе? Считая, что перед нами игра двух лиц с нулевой суммой, прежде всего, составим платежную матрицу (таблица):

		Лиза	
		Прийти рано	Прийти поздно
Саша	Прийти рано	0	–1
	Прийти поздно	–4	0

Будем искать оптимальные стратегии участников при многократных встречах. Сначала проверим, нет ли у матрицы седловых точек. Оказывается, что нет. (Минимум в каждой строке отрицателен, а максимумы в столбцах равны 0). Значит, наверняка существуют оптимальные смешанные стратегии для каждого из них.

Пусть Саша выбирает ход «прийти рано» с частотой x, а ход «прийти поздно» – с частотой $1–x$. Аналогично для двух ходов Лизы обозначим частоты ее выбора через y и $1–y$. Средний выигрыш, который получит Саша при многократных свиданиях, составляет: $W(x,y) =–4\cdot y\cdot(1–x) +(–1)\cdot x\cdot(1–y) + 0\cdot x\cdot y + 0\cdot(1–x)\cdot(1–y) = 5\cdot x\cdot y–x-4\cdot y$. Тогда средний выигрыш Лизы составит: $–W(x,y) = –5xy+x+4y$. Величину x Саше нужно подобрать так, чтобы выигрыш $W(x,y)$ достиг максимума. Аналогично Лизе – подобрать y, чтобы $–W(x,y)$ был максимален. Вычисляем производную функции W по x и приравнивая ее нулю получаем: $5y–1 = 0$. Производную $–W$ по y также приравниваем нулю: $5x–4 = 0$. Отсюда можно найти x и y.

Ответ: $x = 4/5$, $y = 1/5$. Полученный результат объясняется так: Саша должен приходить к кинотеатру в четырех случаях из пяти раньше назначенного времени, то есть каждый раз случайно именно с этими вероятностями принимать решение. Лиза же, наоборот, в четырех случаях из пяти должна опаздывать. Оптимальные смешанные стратегии найдены. Тогда ее средний выигрыш составит $-W = -5 \cdot 4/5 \cdot 1/5 + 4/5 + 4 \cdot 1/5 = 4/5$. Любое отклонение от смешанной стратегии для Лизы приведет к снижению ее среднего выигрыша (снижение проигрыша для Саши). Аналогичны вредные последствия отклонения от своей смешанной стратегии для Саши.

Пример 3. В данном случае в центре анализа стоит простая матрица, показывающая, какие стратегии могут применять оба игрока, и исходы всевозможных комбинации этих стратегий. Пример такой матрицы приведен в табл. 1, которая дает возможные исходы игры с точки зрения человека, который не может вспомнить, является ли сегодняшний день днем рождения его жены! Он может применить две стратегии, а именно: либо купить цветы, либо прийти домой без цветов. У природы здесь тоже две стратегии, т. е. день рождения жены либо сегодня, либо в другой день.

Таблица 1. **Матрица игры, указывающая стратегии и исходы для задачи «Не сегодня ли день рождения жены?»**

	Стратегия	**Природа**	
		День рождения не сегодня	День рождения сегодня
Муж	**Без цветов**	0	- 10
	С цветами	1	1,5

Числа в таблице показывают исход игры с точки зрения мужа для каждой комбинации стратегий двух игроков. В соответствии с ними, если муж приходит домой без цветов и день рождения жены не сегодня, исход игры для него нулевой — он ничего не выигрывает и ничего не проигрывает. Если же он приходит без цветов, но день рождения жены именно сегодня, муж проигрывает достаточно много (-10), так как он забыл нечто, о чем следовало бы хорошо помнить. Если муж приходит домой с цветами, но день рождения не сегодня, имеется весьма скромный выигрыш, ценность которого, быть может, слегка уменьшается из-за ощущения, что он сделал нечто, чего мог бы и не делать. Если муж приходит домой с цветами и день рождения его жены именно сегодня, выигрыш нескольку больше (l,5), так как муж вспомнил о том, чего в общем-то и не должен был забывать. Можно показать, что данная игра обладает той характерной особенностью, которая в теории игр называется «седловой точкой». Попросту говоря, *когда наибольший из минимумов по строке совпадает с наименьшим из максимумов по столбцу, игра имеет седловую точку и игрокам всегда следует придерживаться той чистой стратегии,* которая стоит па пересечении соответствующих строки и столбца. В данной игре мужу в любом случае следует прийти домой с цветами!

Поиск седловых точек является весьма важным моментом теории игр;

вероятность того, что эти седловые точки будут существовать у случайно выбранной матрицы, велика для матриц невысоких порядков. В тех же случаях, когда никакой седловой точки не существует, можно показать, что решение следует искать в смешанных стратегиях. Это означает, что должны применяться две или более стратегии и что вероятности, с какими данные стратегии применяются, могут быть вычислены по матрице игры. Каждый раз во время игры выбор стратегии должен осуществляться случайно, но с фиксированными вероятностями для соответствующих стратегий.

Описанный выше пример взят из книги Вильямса (Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег или букварь по теории стратегических игр. – М.: Советское радио, 1960). Эта книга служит прекрасным введением в теорию игр, написанным в увлекательной и остроумной форме с множеством практических примеров.

Уместно, конечно, спросить, почему мы рассматриваем природу как злостного противника, стремящегося минимизировать выигрыш партнера, будь то человек, животное или растение. И все же в ситуациях, когда у нас не хватает знаний о реакции живых организмов или внешней среды на выбор стратегий, которые будут давать наилучший результат хотя бы в среднем, стоит применять некую комбинацию стратегий, консервативную в том смысле, что она минимизирует ущерб, причиняемый при наихудших стратегиях, которые может применить природа.

Игры с природой. Вначале обсудим критерии успеха в играх вообще и в играх с природой, в частности. Вернемся к одному из трудных вопросов: для данной конкретной ситуации построить отвечающую ей целевую функцию. Решение его выходит за рамки теории игр и относится уже к теории полезности.

Во многих экономических задачах подходящими по смыслу целевыми функциями являются прибыль (или убыток). Наиболее простая цель – это отыскание максимального среднего дохода (или минимального среднего убытка). Предполагаем, что доход зависит от случайно реализовавшегося состояния природы. Тогда средний (по возможным состояниям погоды) доход, точнее математическое ожидание дохода, определяется как сумма величин дохода, умноженных на вероятности появления тех состояний природы, которые этим доходам соответствуют.

Критерий этот употребляется далеко не всегда, так как доставляемая им информация слишком усреднена. Как уже отмечалось, часто каждое действие оценивается по наихудшему для него состоянию природы. Оптимальным действием считается то, которое приводит к наилучшему результату при наихудшем состоянии. Такой критерий качества управления носит название максиминного критерия. Ясно, что максиминная стратегия обеспечивает наилучший ответ на наихудшее состояние природы, то есть, по сути, это стратегия осторожного, пессимистичного игрока.

Вместо того чтобы рассматривать платежную матрицу при выборе решения в условиях неопределенности, часто используют разумно построенную матрицу риска, то есть потерь при разных ходах человека и состояниях природы. Тогда к матрице риска может применяться минимаксный критерий, то есть выбирается то действие, которое делает наименьшим максимальный риск. Это тоже осторожная стратегия.

Возможны и другие критерии, учитывающие не наихудшее состояние природы, а ее наилучшее состояние, комбинации наилучшего и наихудшего и т.п. Какой критерий выбрать, зависит от конкретной задачи, а также от человека, который ее решает. Целевая функция зачастую находится в сильной зависимости и от искусства решающего, и от некоторых черт его характера (например, пессимист он или оптимист).

Литература:

1. Вентцель, Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. / Е. С. Вентцель. – 2-ое изд. стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988, 208 с.
2. Джефферс, Дж. Введение в системный анализ: применение в экологии/ Дж. Джефферс; пер. с англ. Д. О. Логофета; под ред. и с предисл. Ю. М. Свирежева. М.: Мир, 1981. – 256 с.
3. Леньков, И.И. Экономико-математическое моделирование систем и процессов в сельском хозяйстве/ И.И. Леньков. Минск: ДизайнПРО, 1997. – 304 с.
4. Мамеева В.Е. Системный анализ и основы моделирования экосистем: учебно-методическое пособие к лабораторно-практическим работам для студентов обучающихся по специальности 110102 агроэкология. Брянск. Издательство Брянской ГСХА, 2011 г. 132с.
5. Петракова Н.В. Основы математического моделирования. Модели. Методы. Примеры / Н.В. Петракова. Брянск: Издательство Брянская ГСХА. 2011. – 162 с.
6. Пугачёва, И. Г. Методы экологических исследований и моделирование экосистем. Лабораторный практикум : учеб. пособие / И. Г. Пугачёва, Н. Ю. Лещина, И. Н. Таранова. – Минск : РИВШ, 2017. – 140 с.
7. Смиряев, А.В. Моделирование: от биологии до экономики: учеб. пособие для студентов специальности «селекция и генетика сельскохозяйственных культур»/ А.В. Смиряев, А.В. Исачкин, Л.К. Харрасова. М.: Изд-во. МСХА, 2002. – 122 с.